▷ funkcja $f(x)$

Co mówi pochodna $\frac{df}{dx}$?

Mówi nam, jak szybko $f(x)$ zmienia się ze zmianą argumentu x o dx:

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx .$$

Jeżeli zmienimy x o dx, wtedy f zmienia się o df. Pochodna jest współczynnikiem tej zmiany. Tyle.

▷ Gradient

Niech $T(x,y,z)$ to funkcja temperatury. Jako funkcja 3 zmiennych. Każdy punkt pomieszczenia ma przypisaną pewną wartość temperatury $T(x,y,z)$.

Pytanie: "jak szybko zmienia się T?" ma nieskończoną liczbę odpowiedzi, każdą inną dla danego kierunku, który możemy wybrać.

Wiemy jednak, że

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

Mówi nam to, jak T zmienia się, kiedy zmieniamy wszystkie trzy zmienne o infinitezymalne wielkości dx, dy, dz.

Zwróćmy uwagę, że NIE wymagamy nieskończonej liczby pochodnych — WYSTARCZĄ TRZY: pochodne cząstkowe wzdłuż każdej współrzędnej x, y, z.

Zapiszmy dowcipnie dT jako iloczyn skalarny:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right)$$

$$= \left(\vec{\nabla}T\right)\cdot\left(d\vec{l}\right)$$

gdzie $\vec{\nabla}T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$

to GRADIENT

$\vec{\nabla}T$ to WEKTOR o 3 składowych.

To właśnie uogólniona pochodna ("przestrzenna") której poszukiwaliśmy!

($d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ czyli

$d\vec{l} = [dx, dy, dz]$)

Geometryczna interpretacja gradientu

▷ Jak każdy wektor gradient posiada WARTOŚĆ i KIERUNEK. Aby określić jego znaczenie geometryczne napiszmy

$$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla} T| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos\Theta$$

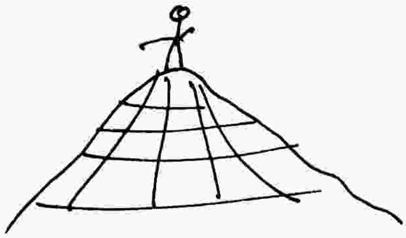
gdzie Θ to kąt pomiędzy $\vec{\nabla} T$ i $d\vec{l}$.

▷ Kiedy USTALIMY WARTOŚĆ $|d\vec{l}|$ i poszukujemy wokół $\vec{l}$ wzdłuż różnych kierunków (zmieniając Θ), maksymalna zmiana T wystąpi oczywiście gdy $\Theta = 0$ (wtedy $\cos\Theta = 1$). Czyli, dla ustalonej odległości $|d\vec{l}|$, dT jest największa gdy poruszamy się w TYM SAMYM KIERUNKU co $\vec{\nabla} T$.

GRADIENT $\vec{\nabla} T$ WSKAZUJE KIERUNEK MAKSYMALNEGO WZROSTU FUNKCJI $T(x, y, z)$.

oraz

Wartość $|\vec{\nabla} T|$ podaje nachylenie (szybkość wzrostu) wzdłuż TEGO MAKSYMALNEGO KIERUNKU.



Wyobraźmy sobie, że stoimy na szczycie wzgórza. Rozglądamy się wokół i znajdujemy kierunek największej stromizny. To jest KIERUNEK GRADIENTU

Następnie mierzymy nachylenie w tym kierunku: to jest WARTOŚĆ GRADIENTU.

(Tutaj mamy do czynienia z funkcją dwóch zmiennych $h(x,y)$, ale idea jest ta sama!)

▷ $dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla} T| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos\Theta$

Dla $\Theta = 90^\circ$ nachylenie wynosi zero (gradient jest prostopadły do poziomic.)

▷ Gdy $\vec{\nabla} T = 0$ w (x,y,z) to $dT = 0$ dla małych przemieszczeń wokół (x,y,z). Zatem będzie to punkt stacjonarny dla funkcji $T(x,y,z)$: maksimum, minimum lub punkt siodłowy.

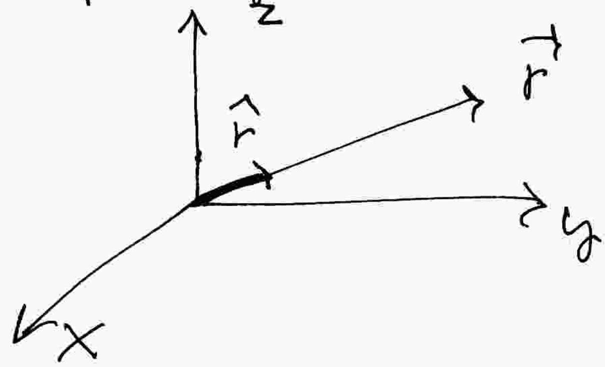
Przykład

Niech $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{i} + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{j} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{k}$$

$$= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$



Odległość od $(0,0,0)$ wzrasta najszybciej w kierunku radialnym, natomiast szybkość wzrostu w tym kierunku wynosi 1

6

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} T = \underbrace{\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\text{OPERATOR}} T$$

OPERATOR (DZIAŁA NA T

Uwaga:

Zwykły wektor $\vec{A}$

(1) $\vec{A}\, a$

(2) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

(3) $\vec{A} \times \vec{B}$

Podobnie, dla $\vec{\nabla}$

(1) $\vec{\nabla} T$ (gradient: w działaniu na skalarną funkcję T)

(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ (dywergencja)

(3) $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ (rotacja)

DYWERGENCJA

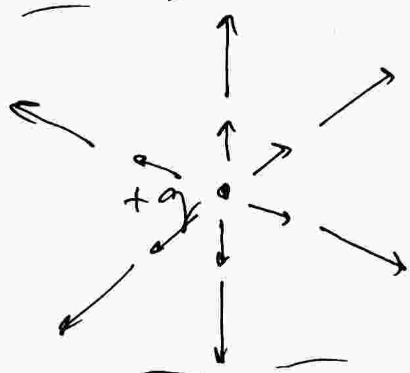
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \right) =$$

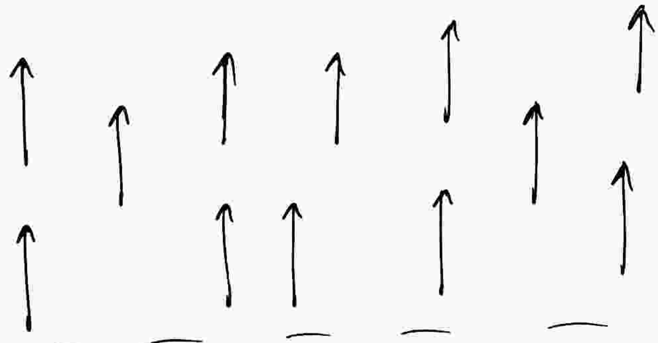
$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

SKALAR!

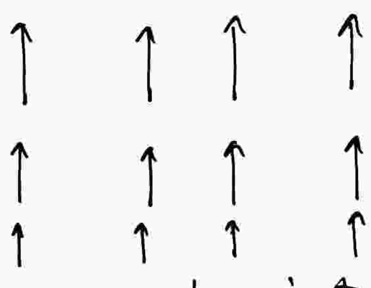
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ to miara jak bardzo wektor $\vec{E}$ rozprzestrzenia się z danego punktu. To ŹRÓDŁOWOŚĆ POLA $\vec{E}$.



duża, dodatnia dywergencja (dla −q, ujemna) (a)



zerowa dywergencja (b)



(c)

dodatnia dywergencja

Uwaga: pole jest w każdym punkcie przestrzeni. Strzałki to wybrane punkty.

Przykłady

patrz (a) strona 7

(1) $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z = 1+1+1 = 3 > 0$$

patrz (b)

(2)

wektor $\hat{k}$ $\vec{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 1\cdot\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{k} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0+0+0 = 0$$

patrz (c)

(3) $\vec{z} = z\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{z} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z) =$$

$$= 0 + 0 + 1 = 1$$

ROTACJA (curl)

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

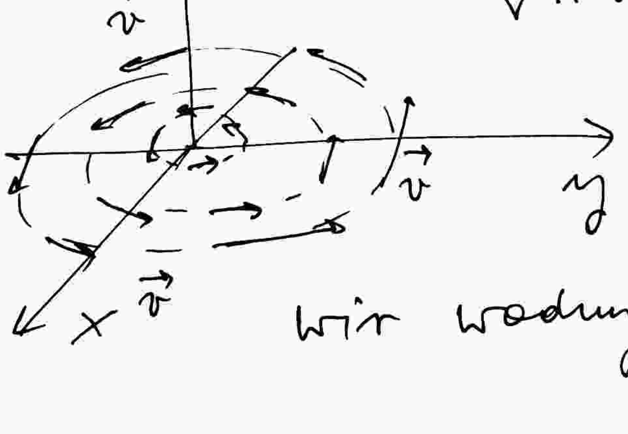
$$= \hat{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

WEKTOR !

$\vec{\nabla} \times \vec{v}$ jest miarą jak bardzo $\vec{v}$ krąży wokół danego punktu.

Przykłady

1



wir wody

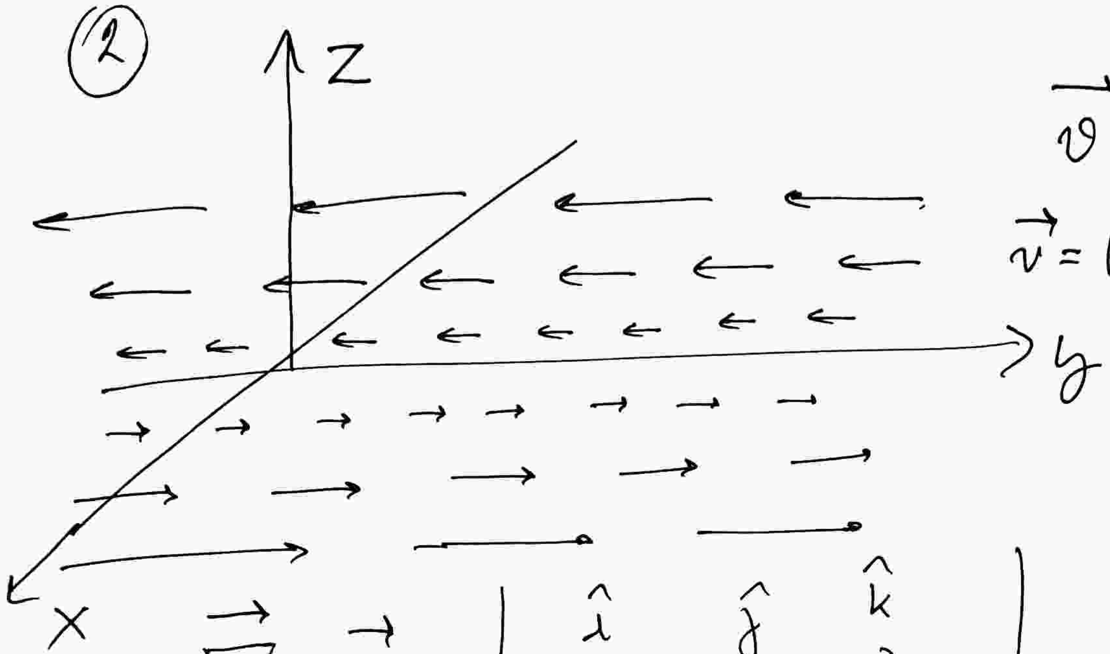
$$\vec{v} = -y\,\hat{i} + x\,\hat{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{k}$$

2

$\vec{v} = x\hat{j}$;

$\vec{v} = [0, x, 0]$



$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}$$

(Nic się nie rozprzestrzenia, tylko wiruje.)

Dla zwykłych pochodnych zachodzi:

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(kf) = k\frac{df}{dx} \qquad k - \text{const}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Podobnie, dla operatorów wektorowych:

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(kf) = k\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}\cdot(k\vec{A}) = k(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}\times(k\vec{A}) = k(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

Prawa dla iloczynów operatorów wektorowych nie są już tak oczywiste.

---

* Zauważmy najpierw, że są DWIE DROGI do otrzymania skalara w przypadku funkcji:

$f \cdot g$ iloczyn 2-ch funkcji skalarnych

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ iloczyn skalarny 2-ch funkcji wektorowych

Są też DWIE DROGI do otrzymania wektora:

$f \vec{A}$ (skalar przez wektor)

$\vec{A} \times \vec{B}$ (iloczyn wektorowy dwóch wektorów)

Dla operatorów wektorowych mamy 6 zasad: 2 dla gradientów, 2 dla dywergencji, 2 dla rotacji:

(1) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

(2) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

(3) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}f)$

(4) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

(5) $\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\times(\vec{\nabla}f)$

(6) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$

Zasady te wynikają wprost z zasad liczenia pochodnych, np:

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$= (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{A} + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \quad \square$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{A}}{g}\right) = \frac{g(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}g)}{g^2}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{A}}{g}\right) = \frac{g(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}g)}{g^2}$$

Drugie pochodne:

Mamy 5 gatunków drugich pochodnych

1. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}T)$ dywergencja gradientu
2. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}T)$ rotacja gradientu
3. $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$ gradient dywergencji
4. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$ rotacja rotacji

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})$ dywergencja rotacji

~~Zbadajmy je bliżej:~~

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}T) = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} =$$

$$= \nabla^2 T \equiv \Delta T \quad \text{(Laplasjan)}$$

ΔT Laplasjan funkcji skalarnej T jest skalarem.

▷ $$\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T) = 0}$$

rotacja gradientu jest zawsze zerowa.

* Dowód tego związku opiera się na znanej równości pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

▷ $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ rzadko się pojawia w zastosowaniach fizycznych

Uwaga: $\nabla^2 \vec{v} = (\nabla \cdot \nabla)\vec{v} \neq \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$

▷ $$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0}$$

dywergencja rotacji jest zawsze zerowa.

* Dowód bazuje na wykorzystaniu tożsamości wektorowej

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

▷ $$\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}}$$!

Ten związek wykorzystuje się przy wyprowadzeniu RÓWNANIA FALOWEGO DLA FAL E-M.